MBA
PROGRAM

KVANTITATÍV MÓDSZEREK

Példatár

Dr. Kövesi János
Tóth Zsuzsanna Eszter

2006

Tartalomjegyzék

1. Valószínűségszámítási tételek. Feltételes valószínűség. Események függetlensége.

1.1. Feltételes valószínűség

1. *Ha nagyon sok kétgyermekes család közül véletlenszerűen választunk egyet, és megtudjuk, hogy legalább az egyik gyermek leány, mekkora a valószínűsége annak, hogy van fiú is a családban?*

Megoldás:
Egy kétgyermekes családban négy egyenlő valószínűségű eset fordulhat elő a gyermekek nemét illetően, mivel mind az első, mind a második gyermek egyenlő valószínűséggel lehet leány vagy fiú:

- Leány-leány
- Leány-fiú
- Fiú-leány
- Fiú-fiú

A esemény: az egyik gyermek leány
B esemény: van fiú a családban

Feladat, hogy az A teljesülése mellett vizsgáljuk a B esemény valószínűségét.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$$

Az (A·B) esemény a fenti 4 lehetőségből kétszer áll fenn, így P(A·B)=2/4=1/2=0,5
Az A esemény, vagyis hogy legalább 1 leány van a családban, a négy esetből háromszor teljesül: P(A)=3/4

$$P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Tehát 2/3 a valószínűsége annak, hogy van fiú a kétgyermekes családban, ha tudjuk, hogy legalább az egyik gyermek leány.

2. *Ejtőernyős ugrást hajtanak végre 1500m^2-es területre. Sikeres az ugrása annak, aki a terepen kijelölt 10m oldalú négyzeten belül ér földet. Különdíjat kap az, aki a négyzet közepén megrajzolt 2m sugarú körben ér le. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy sikeres ugrást végrehajtó ejtőernyős különdíjat is kap, ha a négyzeten belül a leérkezés bármely helyre egyenlő esélyű?*

Megoldás:
„A” az az esemény, hogy különdíjat kap az ejtőernyős, „B” pedig jelentse azt, hogy sikeres ugrást hajtott végre. Az „A” esemény „B” feltétel melletti valószínűségét kell vizsgálnunk
B teljesülése esetén a szóban forgó terület nagysága (10m oldalú négyzet területe): T=100m^2
Az A esemény szempontjából kedvező terület a négyzet közepén lévő kör területe ($r^2\pi$): t=4π m^2 (ez a P(A·B), hiszen itt egyszerre teljesül a sikeres ugrás és a különdíjat érdemlő ugrás)

A feltételes valószínűség:

$$P(A/B) = \frac{t}{T} = \frac{4\pi}{100} \approx 0{,}13$$

Tehát kb. 13% a valószínűsége annak, hogy egy sikeres ugrást teljesítő versenyző különdíjat is kap

3. *Egy urnában van 4 fehér és 6 fekete golyó. Egymás után kettőt kihúzunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a második golyó fehér feltéve, hogy az első fekete.*

Megoldás:
A esemény: a második golyó fehér
B esemény: az első golyó fekete
Ki kell számítanunk a P(A·B) és P(B) eseményeket.

A húzás sorrendje ebben az esetben lényeges. Ráadásul nem tesszük vissza az elsőre kihúzott golyót, így 10·9=90 különféle húzási eredmény lehetséges. Ebből azok száma, amelynél az első fekete, és a második fehér: 6·4=24

Így:
$P(A \cdot B) = \frac{24}{90}$ (kedvező esetek száma/összes eset)

A „B” esemény valószínűsége:
Itt a kedvező eset azon húzások száma, ahol az első golyó fekete (a második pedig tetszőleges), így a 24-hez hozzá kell még adnunk azoknak a számát, amelyekben az első is és a második is fekete. Ezek száma: 6·5=30. A „B” esemény kedvező eseteinek száma 24+30=54.

Így:
$P(B) = \frac{54}{90}$

A keresett feltételes valószínűség tehát:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9} \approx 0{,}444$$

1.2. Teljes valószínűség tétele

1. *Három urnában fehér és fekete golyók vannak elhelyezve. Az elsőben 2 fehér és 3 fekete; a másodikban 3 fehér és 4 fekete; a harmadikban 4 fehér és 5 fekete golyó van. A kísérlet abban áll, hogy véletlenszerűen kiválasztunk egy urnát: legyen: 1/2, 1/3 és 1/6 rendre az első, a második és a harmadik urna kiválasztásának a valószínűsége. Ez után a kiválasztott urnából véletlenszerűen kihúzunk egy golyót úgy, hogy mindegyik golyó kihúzásának a valószínűsége egyenlő legyen. Kérdés: mennyi annak a valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk?*

Megoldás:
Legyen B_1, B_2, B_3 annak a valószínűsége, hogy az első, a második és a harmadik urnát választjuk ki. „A" legyen az az esemény, hogy fehér golyót húzunk ki.

$$P(B_1) = 1/2$$
$$P(B_2) = 1/3$$
$$P(B_3) = 1/6$$
$$P(A/B_1) = 2/5$$
$$P(A/B_2) = 3/7$$
$$P(A/B_3) = 4/9$$

$$P(A) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{6} = 0{,}416$$

Tehát 41,6% a valószínűsége annak, hogy fehér golyót húzunk.

2. *Mikrohullámú sütők forgótányérjának kísérleti gyártását végzik egy gyárban. Három tétel mikrohullámú sütő készül el. Az első két tétel a teljes mennyiség egy-egy negyedét, a harmadik tétel pedig a felét adja. A minőség-ellenőrzés során kiderül, hogy az előírt működési óraszámot az első tétel 12%-a, a másodiknak 21%-a, a harmadiknak 28%-a éri el. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiszemelt mikrohullámú sütő az előírt ideig működik?*

Megoldás:
„A" az az esemény, hogy a mikrohullámú sütő forgótányérja az előírt ideig üzemel. B_1, B_2 és B_3 jelentse azt, hogy a kiválasztott darab az első, a második vagy a harmadik tételből való. A B_i események valószínűségei rendre:

$$P(B_1) = \frac{1}{4}; P(B_2) = \frac{1}{4}; P(B_3) = \frac{1}{2}$$

Felírjuk az A eseménynek a B_i feltételek melletti valószínűségét, vagyis azt, hogy az egyes tételekből választott forgótányérok milyen valószínűséggel működnek a megfelelő ideig:

$P(A/B_1)=12/100; P(A/B_2)=21/100; P(A/B_3)=28/100$

A teljes valószínűség tételét alkalmazva:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A/B_i)\cdot P(B_i)=\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{100}+\frac{1}{4}\cdot\frac{21}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{28}{100}=\frac{3}{100}+\frac{21}{400}+\frac{14}{100}=0{,}2225=22{,}25\%$$

Vagyis 22,25% a valószínűsége annak, hogy hibátlan darabot választunk.

3. *Azonos fajta autórádió előlapokból két tételünk van. Az első tétel 26, a második 32 darabból áll. Mindkét tételben egy-egy hibás darab van. Az első tételből egy véletlenszerűen kiválasztott darabot átteszünk a másodikba. Ezután a második tételből választunk egyet találomra, és ezt megvizsgáljuk. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a darab selejtes?*

Megoldás:

Jelentse „A” esemény azt, hogy a második tételből selejtest húzunk. Jelentse B azt, hogy az első tételből jót, $\overline{B}$ pedig azt, hogy hibásat tettünk át a másodikba. Ezeknek a valószínűségei:

$$P(B)=\frac{25}{26}; P(\overline{B})=\frac{1}{26}$$

Ha B következett be, akkor a második tételben 33 darabból csak egy selejtes van, és az A esemény feltételes valószínűsége: $P(A/B)=\frac{1}{33}$; ha viszont $\overline{B}$ következett be, akkor két selejtes darab van a második tételben, így ebben az esetben a feltételes valószínűség: $P(A/\overline{B})=\frac{2}{33}$.

Alkalmazzuk a teljes valószínűség tételét:

$$P(A)=P(A/B)\cdot P(B)+P(A/\overline{B})\cdot P(\overline{B})=\frac{1}{33}\cdot\frac{25}{26}+\frac{2}{33}\cdot\frac{1}{26}=0{,}0314$$

Vagyis 3,24% a valószínűsége annak, hogy a második tételből selejtest húzunk.

1.3. Bayes-tétel

1. *10 azonos alakú doboz közül az első 9-ben 4-4 golyó van, mégpedig 2 fehér és 2 kék. A tizedik dobozban 5 fehér és 1 kék golyó van. Az egyik találomra kiválasztott dobozból véletlenszerűen kiveszünk egy golyót. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a tizedik dobozból való, ha a kivett golyó fehér?*

Megoldás:
Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy fehéret húztunk. B_j-vel jelöljük azt, hogy a j-edik dobozból választottunk. Ezeknek a valószínűsége azonos: $P(B_j)=1/10$.

Az A esemény B_j feltétel melletti feltételes valószínűségére a következő áll fenn:

$P(A/B_j)=1/2$, ha j=1,2,3…9
$P(A/B_{10})=5/6$

$$P(B_{10}/A)=\frac{P(A/B_{10})\cdot P(B_{10})}{\sum_{j=1}^{10}P(A/B_j)\cdot P(B_j)}=\frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}(9\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{6})}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{9}{2}+\frac{5}{6}}=\frac{5}{32}$$

Tehát 5/32 a valószínűsége annak, hogy egy fehér golyót éppen a 10. dobozból húzunk.

Másik megoldás:
A ismét az az esemény, hogy fehéret húzunk. B_1 jelentse azt, hogy a kilenc egyforma közül húzunk (bármelyikből), B_2 pedig jelentse azt, hogy a 10.-ből húzunk. Így $P(B_1)=9/10$; $P(B_2)=1/10$. $P(A/ B_1)=1/2$, $P(A/ B_2)=5/6$. Innentől a megoldás menete ugyanaz.

2. *Egy forgácsoló üzemben elkészült munkadarabok 96%-a felel meg a súlyszabványnak. A minőség-ellenőrzés során az elkészült munkadarabok egy részét megvizsgálták, a súly szempontjából szabványos darabok 98%-a bizonyult alakra jónak, a nem szabványos súlyú darabokból pedig 5%-ot nyilvánítanak alakra jónak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy darab, amely a minőségellenőrzésen alakra jónak bizonyult, megfelel a súlyszabványnak?*

Megoldás:
„A” az az esemény, hogy a munkadarab alakra jónak bizonyul.
Legyen B_1 az az esemény, hogy a vizsgált darab súlya szabványos, a B_2 pedig, hogy a darab súlya nem szabványos.

Megjegyzés:
$B_2=\overline{B_1}$

$P(B_1) = 0{,}96$

$P(B_2) = 0{,}04$

$P(A/B_1) = 0{,}98$

$P(A/B_2) = 0{,}05$

A B_1 esemény valószínűségét keressük az A esemény teljesülése esetén. Ezt a feltételes valószínűséget a Bayes-tétellel számoljuk ki:

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)\cdot P(B_1)}{P(A/B_1)\cdot P(B_1) + P(A/B_2)\cdot P(B_2)} = \frac{0{,}98\cdot 096}{0{,}98\cdot 0{,}96 + 0{,}05\cdot 0{,}04} = 0{,}998$$

Tehát kb. 99,8% a valószínűsége annak, hogy a minőségellenőrzésen alakra jónak bizonyult darab súlya megfelel a szabványnak.

3. *Egy biológiai kísérlet során 100 egyedet három – 20, 30 ill. 50 egyedből álló- csoportokra osztanak. Az első csoport egyedeit gyenge, a másodikét közepes, a harmadikét erős hatóanyaggal oltják be. A csoportokat ezután külön tárolják. Az oltás hatására az első csoportból 3, a másodikból 10, a harmadikból pedig 39 megy keresztül valamilyen változáson. Ezután a csoportok elkülönítését megszüntetik. Ha az összes egyedből egyet találomra kiválasztunk és ennek vizsgálata azt mutatja, hogy nem ment keresztül változáson, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott egyed a második csoportból való?*

Megoldás:

„A” az az esemény, hogy a kiválasztott egyed nem megy keresztül változáson.
A B_j azt jelenti, hogy a kiválasztott egyed a j-edik csoportból való.

$$P(B_1) = \frac{20}{100}; P(B_2) = \frac{30}{100}; P(B_3) = \frac{50}{100}$$

$$P(A/B_1) = \frac{17}{20}; P(A/B_2) = \frac{2}{3}; P(A/B_3) = \frac{11}{50}$$

$$P(B_2/A) = \frac{P(A/B_2)\cdot P(B_2)}{\sum_{j=1}^{3} P(A/B_j)\cdot P(B_j)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{30}{100}}{\frac{17}{20}\cdot\frac{20}{100} + \frac{2}{3}\cdot\frac{30}{100} + \frac{11}{50}\cdot\frac{50}{100}} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12} = 41{,}67\%$$

Tehát 41,67% annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott egyed a második csoportból való.

1.4. Események függetlensége

1. *Ketten lőnek céltáblára. A találat valószínűsége az első személy esetében 0,7; a második esetében 0,6. A találatok egymástól függetlenek. Ha mindketten egy-egy lövést adnak le, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább egy találat van a céltáblán.*

Megoldás:
Legyen „A” az az esemény, hogy az első személy talál, és „B” jelentse azt, hogy a második találatot ér el. Az (A+B) esemény azt jelenti, hogy legalább egy találat van a céltáblán. Ennek a valószínűségére vagyunk kíváncsiak és felhasználjuk azt is, hogy az A és B események függetlenek:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=0{,}7+0{,}6-0{,}7\cdot 0{,}6=$$
$$=1{,}3-0{,}42=0{,}88$$

Tehát 0,88 a valószínűsége annak, hogy a céltáblán legalább egy találat van.

2. *Két, egymástól függetlenül dolgozó szerszámgépen azonos fajta alkatrészeket gyártanak. Az első gépen 0,8; a második gépen 0,7 valószínűséggel kapunk első osztályú alkatrészeket, az ugyanazon a gépen gyártott alkatrészek is függetlenek egymástól. Az első gép gyártmányaiból 3, a második gép gyártmányaiból pedig 2 alkatrészt választunk találomra, és ezeket megvizsgáljuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mind az 5 első osztályú?*

Megoldás:
Legyen „A” a szóban forgó esemény. A függetlenség alapján

$$P(A)=0{,}8^3\cdot 0{,}7^2\approx 0{,}251$$

Tehát 25,1% a valószínűsége annak, hogy a vizsgált alkatrészek mind első osztályúak.

3. *Két dobozban golyók vannak, amelyek csak színeikben különböznek. Az első dobozban 5 fehér, 11 fekete és 8 piros, a másodikban 10 fehér, 8 fekete és 6 piros golyó van. Mindkét dobozból találomra kiveszünk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két kiválasztott golyó azonos színű?*

Megoldás:
Legyen „A” az az esemény, hogy a két kiválasztott golyó azonos színű. A két húzás egymástól független. Háromféle, egymást kizáró esemény összegeként adódik az A, mégpedig úgy, hogy vagy mindkét dobozból fehéret, vagy mindkét dobozból feketét, vagy mindkét dobozból pirosat húzunk. Így az A esemény valószínűsége:

$$P(A)=\frac{5}{24}\cdot\frac{10}{24}+\frac{11}{24}\cdot\frac{8}{24}+\frac{8}{24}\cdot\frac{6}{24}\approx 0{,}32$$

Tehát 32% annak a valószínűsége, hogy a két dobozból azonos színű golyót húzunk.

2. Leíró statisztika

1. *Az alábbi táblázat a Budapesti Értéktőzsde hivatalos indexének (BUX) száz napi záróértékéből számított hozamadatait tartalmazza. Készítse el az alábbi adatbázis részletes leíró statisztikai elemzését!*

Napi hozamok									
0,01896	0,00613	0,01091	-0,01742	0,01328	0,02415	0,00805	0,00754	0,0011	-0,00312
0,0846	0,00186	-0,00024	-0,02076	0,01011	0,00476	0,00611	-0,00015	0,03295	-0,00782
0,0529	0,0102	0,0081	-0,0567	0,02865	-0,01836	-0,01001	0,0146	0,01182	0,00729
-0,01877	0,00845	0,00448	0,00602	0,01818	0,00567	0,0018	0,01303	0,01192	0,00104
0,00121	0,01508	-0,00322	0,019	-0,01281	-0,00413	-0,00676	0,00611	0,02417	-0,00365
-0,01759	0,03565	0,02769	0,02964	-0,01967	0,00654	0,00272	-0,01123	0,0253	-0,01055
-0,01255	0,02841	0,04391	0,0581	-0,03858	0,00319	-0,00307	-0,00145	-0,00922	0,00016
0,01269	0,01359	-0,00271	-0,00041	0,02758	0,0008	0,00438	0,01244	0,0044	0,00709
0,00622	0,02758	-0,01226	0,0022	-0,00043	0,00483	0,01527	0,00432	0,02801	-0,00711
0,00248	0,03258	-0,01609	0,00087	0,02823	0,0143	0,01493	-0,00391	-0,01541	0,00524

Rangsor (oszloponként)									
-0,0567	-0,01281	-0,00413	-0,00024	0,0022	0,00524	0,00754	0,01269	0,01896	0,02841
-0,03858	-0,01255	-0,00391	-0,00015	0,00248	0,00567	0,00805	0,01303	0,019	0,02865
-0,02076	-0,01226	-0,00365	0,00016	0,00272	0,00602	0,0081	0,01328	0,02415	0,02964
-0,01967	-0,01123	-0,00322	0,0008	0,00319	0,00611	0,00845	0,01359	0,02417	0,03258
-0,01877	-0,01055	-0,00312	0,00087	0,00432	0,00611	0,01011	0,0143	0,0253	0,03295
-0,01836	-0,01001	-0,00307	0,00104	0,00438	0,00613	0,0102	0,0146	0,02758	0,03565
-0,01759	-0,00922	-0,00271	0,0011	0,0044	0,00622	0,01091	0,01493	0,02758	0,04391
-0,01742	-0,00782	-0,00145	0,00121	0,00448	0,00654	0,01182	0,01508	0,02769	0,0529
-0,01609	-0,00711	-0,00043	0,0018	0,00476	0,00709	0,01192	0,01527	0,02801	0,0581
-0,01541	-0,00676	-0,00041	0,00186	0,00483	0,00729	0,01244	0,01818	0,02823	0,0846

Megoldás:

1. Osztályok számának meghatározása. (Egy lehetséges módszer.)

$$2^{k_0} > N \qquad h_0 = \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{k_0}$$

$$2^7 = 128 \qquad h_0 = \frac{0{,}08460 - (-0{,}05670)}{7} = 0{,}02018 \approx 0{,}0202$$

2. Gyakorisági táblázat

osztályközhosszúság		f_i	g_i	f_i'	g_i'
-0,0567	-0,0365	2	0,02	2	0,02
-0,0365	-0,0163	25	0,25	27	0,27
-0,0163	0,0039	17	0,17	44	0,44
0,0039	0,0241	38	0,38	82	0,82
0,0241	0,0443	15	0,15	97	0,97
0,0443	0,0645	2	0,02	99	0,99
0,0645	0,0847	1	0,01	100	1
		100	100%		

3. Kvartilisek meghatározása

$$s_{1/4} = \frac{1}{4}(100+1) = 25{,}25$$

$$Q_1 = -0{,}00312 + 0{,}25\left(-0{,}00307 - (-0{,}00312)\right) = -0{,}0031075$$

$$s_{3/4} = \frac{3}{4}(100+1) = 75{,}75$$

$$Q_3 = 0{,}0143 + 0{,}75(0{,}0146 - 0{,}0143) = 0{,}014525$$

4. Medián

$$s_{1/2} = \frac{1}{2}(100+1) = 50{,}5$$

$$Me = \frac{1}{2}(0{,}00483 + 0{,}00524) = 0{,}005035$$

$$M\hat{e} = 0{,}00483 + 0{,}5(0{,}00524 - 0{,}00483) = 0{,}005035$$

Medián becslése a gyakorisági táblázat alapján

$$\hat{M}e = Y_{me,0} + \frac{\frac{N}{2} - f'_{me-1}}{f_{me}} h_{me} \qquad f'_{me} \geq \frac{N}{2}$$

$$\hat{M}e = 0{,}0039 + \frac{\frac{100}{2} - 44}{38} 0{,}0202 = 0{,}00709$$

5. Módusz

A 4. osztály a modális osztály:

$$\hat{M}o = Y_{mo,0} + \frac{d_a}{d_a + d_f} h_{mo} \qquad d_a = f_{mo} - f_{mo-1} \qquad d_f = f_{mo} - f_{mo+1}$$

$$\hat{M}o = 0{,}0039 + \frac{38-17}{(38-17)+(38-15)} 0{,}0202 = 0{,}01354$$

6. Számtani átlag
Az egyenkénti adatokból számítva:

$$\bar{x} = \frac{(-0{,}0567) + (-0{,}03858) + ... + 0{,}0846 + 0{,}98497}{100} = \frac{0{,}130453}{100} = 0{,}00130453$$

Becslés gyakorisági táblázatból:

$$\bar{X} = \frac{(-0{,}0466)\cdot 2 + (-0{,}0264)\cdot 6 + ... + 0{,}0544\cdot 2 + 0{,}0746\cdot 1}{100} =,0{,}007536$$

Osztályközhossz.		osztályközép	f_i	d_i=Y_i-$Y_{\text{átl.becs.}}$	d_i^2	$f_i d_i^2$
-0,0567	-0,0365	-0,0466	2	-0,039	0,00152	0,00304
-0,0365	-0,0163	-0,0264	6	-0,019	0,000361	0,002166
-0,0163	0,0039	-0,0062	36	-0,0013	0,00000169	0,000061
0,0039	0,0241	0,014	38	0,006464	0,000042	0,001596
0,0241	0,0443	0,0342	15	0,026664	0,000711	0,010665
0,0443	0,0645	0,0544	2	0,047	0,00221	0,00442
0,0645	0,0847	0,0746	1	0,067	0,0045	0,0045
			100			**0,02645**

A táblázat utolsó három oszlopa majd csak a szórás becslésénél kell.

7. terjedelem

$$R = Y_{\max} - Y_{\min} = 0{,}0846 - (-0{,}0567) = 0{,}01413$$

interkvartilis terjedelemmutató

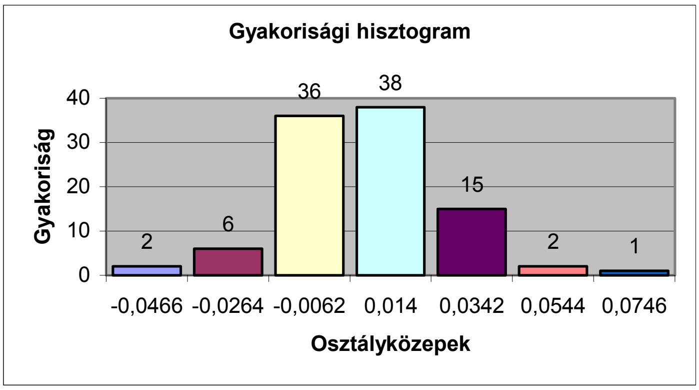
$$R_{0,5} = Q_3 - Q_1 = 0{,}014525 - (-0{,}0031075) = 0{,}0176325$$

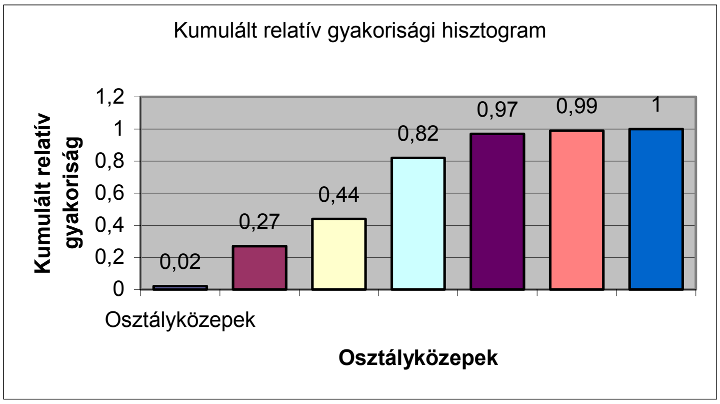
8. Tapasztalati szórások

Becslés gyakorisági táblázat alapján:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{r} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{r} f_i}} = \sqrt{\frac{0{,}02645}{100}} = 0{,}0514$$

11. Grafikus ábrázolás, hisztogram





2. *Omniás példa: 4. előadás prezentációjában megoldva*

3. *Egy üdítőitalokat forgalmazó cég budapesti részlegénél dolgozó 26 értékesítési képviselő 2005 január havi teljesítménye (kiszállított mennyiség, ezer rekesz):*

15,6	***26,8***	***13,5***	***8,0***	***13,3***	***20,2***	***13,7***	***15,7***	***24,7***
8,5	***19,1***	***16,6***	***19,2***	***18,7***	***16,1***	***20,5***	***14,2***	***13,2***
15,9	***13,1***	***18,8***	***33,6***	***34,7***	***16,9***	***14,8***	***21,8***	

Számítsuk ki az átlagos teljesítményt, határozzuk meg a mediánt! Számítsuk ki az ismert szóródási mérőszámokat! Jellemezzük az eloszlás aszimmetriáját a Pearson-féle mutatószám segítségével! Készítsünk gyakorisági sort, és becsüljük meg a móduszt!

Megoldás:

Rangsor

8,0	**8,5**	**13,1**	**13,2**	**13,3**	**13,5**	**13,7**	**14,2**	**14,8**	**15,6**	**15,7**	**15,9**	**16,1**
16,6	**16,9**	**18,7**	**18,8**	**19,1**	**19,2**	**20,2**	**20,5**	**21,8**	**24,7**	**26,8**	**33,6**	**34,7**

A, Számítsuk ki az átlagos teljesítményt, határozzuk meg a mediánt!

Átlagos teljesítmény, meghatározása számtani átlaggal:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{N} = \frac{8 + 8{,}5 + ... + 33{,}6 + 34{,}7}{26} \approx 18 ezer$$

18 ezer rekesz az átlagos teljesítmény.

Medián:

$$Me = \frac{16{,}1 + 16{,}6}{2} = 16{,}35$$

16,35 ezer rekesznél többet teljesített az értékesítési képviselők fele, a másik fele kevesebbet.

B, Számítsuk ki az ismert szóródási mérőszámokat!

Terjedelem

$$R = X_{\max} - X_{\min} = 34{,}7 - 8 = 26{,}7$$

Szórás

$$s = \sqrt{\frac{(8-18)^2 + (8{,}5-18)^2 + ... + (33{,}6-18)^2 + (34{,}7-18)^2}{26}} = 6{,}384$$

6,38 ezer rekesszel tér el átlagosan az egyes képviselők teljesítménye az átlagostól.

Korrigált tapasztalati szórás

$$s^* = \sqrt{\frac{(8-18)^2 + (8{,}5-18)^2 + ... + (33{,}6-18)^2 + (34{,}7-18)^2}{25}} = 6{,}3841$$

Relatív szórás:

$$V = \frac{6{,}38}{18} = 0{,}3544$$

Az egyes képviselők teljesítményének az átlagostól való átlagos eltérése 34,5%.

Interkvartilis terjedelemmutató:

$$s_{1/4} = \frac{1}{4}(26+1) = 6{,}75$$

$$Q_1 = 13{,}5 + 0{,}75(13{,}7 - 13{,}5) = 13{,}65$$

$$s_{3/4} = \frac{3}{4}(26+1) = 20{,}25$$

$$Q_3 = 20{,}2 + 0{,}25(20{,}5 - 20{,}2) = 20{,}275$$

$$R_{1/2} = Q_3 - Q_1 = 20{,}275 - 13{,}65 = 6{,}625$$

Az értékesítési képviselők negyedének a teljesítménye 13,65 ezer rekesznél alacsonyabb, háromnegyedüké magasabb (Q_1). Az értékesítési képviselők háromnegyedének teljesítménye 20,275 ezer rekesznél alacsonyabb, egynegyedüké magasabb (Q_3).

Az interkvartilis terjedelemmutató azt fejezi ki, hogy az értékesítési képviselők felének teljesítménye 6,625 ezer rekesznyi sávban helyezkedik el.

C, Jellemezzük az eloszlás aszimmetriáját a Pearson-féle mutatószám segítségével!

$$P = \frac{3\left(\overline{Y} - Me\right)}{s} = \frac{3(18-16,35)}{6,21} = 0,79 = 79,7\%$$

Erősebb baloldali aszimmetria.

D, Készítsünk gyakorisági sort, és becsüljük meg a móduszt!

$2^{k_0} > N$, kb. 5 osztályt célszerű készíteni.

$$h_0 = \frac{34{,}7 - 8}{5} = 5{,}34$$

Legyen 5,4 kerekítéssel az osztályköz-hosszúság:

Osztályok:

Osztályhatár	**gyakoriság**
8,0-13,4	**5**
13,5-18,8	**12**
18,9-24,3	**5**
24,4-29,8	**2**
29,9-35,3	**2**
Összesen:	**26**

$$M\hat{o} = 13{,}5 + \frac{12-5}{(12-5)+(12-5)} \cdot 5{,}3 = 16{,}15$$

Az értékesített mennyiségek a 16,15 ezer rekesz körül tömörülnek. (Ez egyébként most egybeesik a nyers módusszal, mert a szomszédos osztályok gyakorisága megegyezik.)

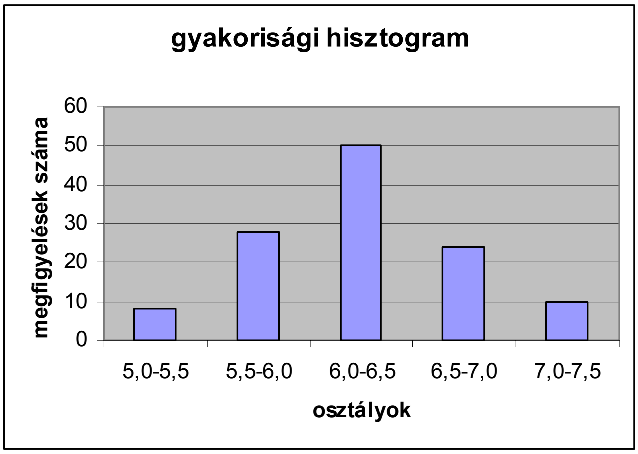
4. *Minőségellenőrzés keretében vizsgálták egy adott típushoz tartozó elektromos habverők élettartamát. A 120 megfigyelés eredménye:*

Élettartam (év)	**Megfigyelések száma (db)**
5,0-5,5	**8**
5,5-6,0	**28**
6,0-6,5	**50**
6,5-7,0	**24**
7,0-7,5	**10**
Összesen	**120**

Ábrázoljuk a gyakorisági sort! Számítsuk ki a helyzeti középértékeket, az átlagot, a szórást, az aszimmetria egyik mérőszámát!

Megoldás:

a) Ábrázoljuk a gyakorisági sort!



b) Számítsuk ki a helyzeti középértékeket, az átlagot, a szórást, az aszimmetria egyik mérőszámát!

Élettartam (év)	Megfigyelések száma (db) (gyakoriságok)	Kumulált gyakoriság
5,0-5,5	8	8
5,5-6,0	28	36
6,0-6,5	50	86
6,5-7,0	24	110
7,0-7,5	10	120
Összesen	120	

$$Me = 6 + \frac{60-36}{50} * 0,5 = 6,24$$

$$Mo = 6 + \frac{22}{22+26} * 0,5 = 6,23$$

$$\bar{x} = \frac{8*5,25+...+10*7,25}{120} = 6,25$$

$$s = \sqrt{\frac{8(5,25-6,25)^2+...+10*(7,25-6,25)^2}{120}} = 0,508$$

$$P = \frac{3*(6,25-6,24)}{0,508} = 0,059$$

Enyhe bal oldali aszimmetria.

3. Valószínűségi változó. Elméleti eloszlások

3.1. Binomiális eloszlás

1. *Valaki találomra kitölt egy totószelvényt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első hét mérkőzéshez az 1, 2, x lehetőségek közül legalább 5 helyre egyest választ?*

Megoldás:
Legyen A az az esemény, hogy a szelvényt kitöltő egy mérkőzéshez 1-est ír.
$P(A) = p = 1/3$
így
$P(\overline{A}) = q = 1 - p = 1 - 1/3 = 2/3$

A ξ valószínűségi változó jelentse az n=7 db mérkőzéshez beírt egyesek számát.

$$p_k = P(\xi = k) = \binom{n}{k}(p)^k (q)^{7-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{7-k} \quad (k = 0,1,...,7)$$

Az az esemény, hogy az első hét mérkőzéshez <u>legalább</u> öt helyre 1-es kerül három, egymást kizáró esemény összegeként fogható fel: vagy öt, vagy hat, vagy hét helyre ír egyest a fogadó. Ezek a valószínűségek a binomiális eloszlás táblázatának segítségével (n=7; p=0,3 és 0,35 értékeit átlagolva (vagy egyszerűen a 0,35-höz tartozó értéket alapul véve); k=5,6,7) a következők:

$$p_5 + p_6 + p_7 = 0{,}0358 + 0{,}006 + 0{,}0004 = 0{,}0422$$

Tehát kb. 4,2% a valószínűsége annak, hogy legalább öt helyre 1-es kerül.

2. *Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha egy családban 10 gyerek születik, akkor közülük éppen öt fiú lesz?*

Megoldás:
Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy fiú születik legyen A esemény.
$p(A) = p = 1/2$

A leány születésének valószínűsége:
$p(\overline{A}) = 1 - p = q = 1/2$

A ξ valószínűségi változó jelentse az n=10 gyermek közül a fiúk számát. Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a ξ=5:

$p_5 = 0{,}2461 = 24{,}61\%$ (binomiális eloszlás táblázata: n=10, p=0,5, k=5)

3.2. Poisson-eloszlás

1. *Egy elektronikus műszer 1000 alkatrészből áll. Egy alkatrész a többitől függetlenül 0,001 valószínűséggel romlik el egy év alatt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább két alkatrész romlik el egy év alatt?*

Megoldás:
Tulajdonképpen binomiális eloszlással kellene számolnunk. Mivel azonban az alkatrészek száma (n=1000) elég nagy (n>30), a p=0,001 valószínűség pedig nagyon kicsi, így bevezetjük a

$\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$ paramétert, és a binomális eloszlás tagjait a megfelelő Poisson-eloszlásból kapott tagokkal közelítjük.

A legalább két alkatrész elromlási eseményének ellentettje, hogy kettőnél kevesebb alkatrész romlik el, vagyis hogy vagy 0 vagy 1 alkatrész romlik el. Ezek az esetek egymást kizárják, és összegük valószínűségét ezek valószínűségének összege adja:

$p_0 + p_1 = 0{,}367 + 0{,}367 = 0{,}734$ (Poisson-eloszlás táblázatból, λ=1, k=0,1)

Így a legalább két alkatrész meghibásodásának valószínűsége:

$1 - (p_0 + p_1) = 1 - 0{,}734 = 0{,}266$

Tehát kb. 26,6% a valószínűsége annak, hogy a műszer alkatrészei közül legalább kettő elromlik egy év alatt.

2. *Egy telefonközponthoz 600 előfizető tartozik. Tegyük fel, hogy 0,005 a valószínűsége annak, hogy valamelyik előfizető egy meghatározott órában kapcsolást kér. Mennyi a valószínűsége annak, hogy abban az órában épp 4 előfizető kér vonalat?*

Megoldás:
Itt is binomiális eloszlással kellene számolnunk, de n=600 elég nagy és p=0,005 pedig elég kicsi ahhoz, hogy a binomális eloszlást a Poisson-eloszlással közelítsük.

$\lambda = n \cdot p = 600 \cdot 0{,}005 = 3$

$p_4 = 0{,}168$ (Poisson eloszlás táblázatból: λ=3, k=4)

Tehát 16,8% a valószínűsége annak, hogy az adott órában éppen 4 előfizető kér kapcsolást.

3. *Egy orsózógépen 100 munkaóra alatt átlagosan 3 szakadás következik be. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy ilyen időtartam alatt a szakadások száma túllépi az átlagot? A szakadások Poisson-eloszlás szerint következnek be.*

Megoldás:
A vizsgált időtartam alatt bekövetkező szakadások száma legyen a ξ valószínűségi változó értéke. Ez Poisson-eloszlású, paramétere a vizsgált időtartam alatti szakadások átlagos száma, vagyis 3.

$$\lambda = M(\xi) = 3$$

Itt is fordítva gondolkodunk. A kérdés az, hogy mi a valószínűsége, hogy 3-nál több szakadás következik be. Ennek ellentettjét könnyebb számolni, vagyis annak a valószínűségét keressük, hogy 3 vagy annál kevesebb szakadás következik be. A Poisson-eloszlás táblázatának segítségével már csak ki kell keresni az értékeket (λ=3; k=0,1,2,3)

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}049 + 0{,}149 + 0{,}224 + 0{,}224 = 0{,}646$$

Így annak a valószínűsége, hogy 3-nál több szakadás következik be:

$$p(\xi \geq 3) = 1 - p(\xi < 3) = 1 - 0{,}646 = 0{,}354$$

Vagyis 35,4% a valószínűsége annak, hogy a szakadások száma 100 óra alatt meghaladja a 3-at.

3.3. Exponenciális eloszlás

1. *Bizonyos típusú izzólámpák tönkremeneteléig eltelt égési időtartam hosszát tekintsük valószínűségi változónak. Megállapították, hogy ez a valószínűségi változó exponenciális eloszlást követ, és szórása 1000 óra. Határozzuk meg a valószínűségi változó várható értékét! Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott izzólámpa 3000 órán belül tönkremegy!*

Megoldás:
Mivel a ξ valószínűségi változó várható értéke és szórása megegyezik (mivel exponenciális eloszlást követ), így:

$$D(\xi) = M(\xi) = \frac{1}{\lambda} = 1000 óra$$

$$\lambda = \frac{1}{1000}\frac{1}{óra}$$

Az az esemény, hogy egy izzólámpa 3000 órán belül nem megy tönkre, azt jelenti, hogy a ξ≥3000. Ennek valószínűsége:

$$P(\xi \geq 3000) = 1 - P(\xi < 3000) = 1 - F(3000) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{1000}\cdot 3000}) = e^{-3} \approx 0{,}05$$

Tehát kb. 5% a valószínűsége annak, hogy egy izzólámpa legalább 3000 órán át hibátlanul világít.

3.4. Normális eloszlás

1. *Egy vizsgálat szerint a felnőtt korú férfiak testmagassága N(174 cm; 7 cm) eloszlást követ. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott férfi testmagassága:*
   a) nagyobb, mint 190 cm,
   b) 170 és 185 cm közé esik,
   c) mekkora a testmagasság szórása, ha tudjuk, hogy a férfiak 5%-ának a testmagassága 168 cm alatt van?

Megoldás:
a) nagyobb, mint 190 cm,

$$P(\xi \geq 190) = 1 - P(\xi < 190) = 1 - F(190) = 1 - \Phi(\frac{190-174}{7}) = 1 - \Phi(2{,}28) = 1 - 0{,}988696 =$$
$$= 0{,}011304 = 1{,}13\%$$

b) 170 és 185 cm közé esik,

$$P(170 \leq \xi < 185) = F(185) - F(170) = \Phi(\frac{185-174}{7}) - \Phi(\frac{170-174}{7}) = \Phi(1{,}57) - \Phi(-0{,}57) =$$
$$= \Phi(1{,}57) - 1 + \Phi(0{,}57) = 0{,}941792 - 1 + 0{,}715661 = 0{,}6574 = 65{,}74\%$$

c) mekkora a testmagasság szórása, ha tudjuk, hogy a férfiak 5%-ának a testmagassága 168 cm alatt van?

$$P(\xi < 168) = 0{,}05$$
$$F(168) = 0{,}05$$
$$\Phi(\frac{168-174}{\sigma}) = 0{,}05 \rightarrow \Phi(u) = 0{,}05 \rightarrow \Phi(u) = 0{,}95 \rightarrow u = -1{,}64$$
$$-1{,}64 = \frac{168-174}{\sigma} \rightarrow \sigma = 3{,}66$$

2. *Egy termék élettartama N(13év; 1év) eloszlású.*
   a) *Teljesíti-e az élettartam azt az elvárást, hogy a 11 évnél korábban meghibásodó termékek aránya legfeljebb 1% legyen?*
   b) *Ha nem, akkor hogyan kell megváltoztatni a várható értéket, ill. a szórást, hogy teljesítsék az előírást?*
   c) *Termékfejlesztés eredményeképpen egy új termék élettartama N(16év; 0,9év) eloszlással jellemezhető. Mekkora garanciális időt adjon a cég ahhoz, hogy a termékek legfeljebb 5%-a menjen tönkre a garancia alatt?*

Megoldás:

a) *Teljesíti-e az élettartam azt az elvárást, hogy a 11 évnél korábban meghibásodó termékek aránya legfeljebb 1% legyen?*

$$P(\xi < 11) = F(11) = \Phi(\frac{11-13}{1}) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,97725 = 0,02275 = 2,28\%$$

Nem teljesíti az elvárást, hiszen a 11 évnél korábban meghibásodó termékek aránya 2,28%.

b) *Ha nem, akkor hogyan kell megváltoztatni a várható értéket, ill. a szórást, hogy teljesítsék az előírást?*

(A várható értéknek nyilván nagyobbnak, a szórásnak pedig kisebbnek kell majd lennie.)

Várható érték változtatása:

$$P(\xi < 11) = F(11) = 0,01 \to \Phi(\frac{11-\mu}{1}) = 0,01 \to \Phi(u) = 0,01 \to \Phi(u) = 0,99 \to u = -2,34$$

$$\frac{11-\mu}{1} = -2,34 \to \mu = 13,34 év$$

Szórás változtatása:

$$\Phi(\frac{11-13}{\sigma}) = 0,01$$

$$\frac{11-13}{\sigma} = -2,34 \to \sigma = 0,85$$

c) *Termékfejlesztés eredményeképpen egy új termék élettartama N(16év; 0,9év) eloszlással jellemezhető. Mekkora garanciális időt adjon a cég ahhoz, hogy a termékek legfeljebb 5%-a menjen tönkre a garancia alatt?*

$$P(\xi < x) = F(x) = 0,05 \to \Phi(\frac{x-16}{0,9}) = 0,05$$

$$\Phi(u) = 0,05 \to \phi(u) = 0,95 \to u = -1,64 \to \frac{x-16}{0,9} = -1,64 \to x = 14,52 év$$

14,52 év garanciát kellene adnia a cégnek.

3. *Egy elektronikai gyárban tesztekkel igazolták, hogy egy adott TV képcső élettartama N(5,8 év; 2,3 év) eloszlású. A vállalat 2 év cseregaranciát vállal a képcsövekre.*
   - a) *A képcsövek hány százalékát kell kicserélni a garancia időtartama alatt?*
   - b) *Mekkorára kell növelni a képcsövek élettartamát (a szórás nem változik), ha a cég legfeljebb 2%-os garanciális cserét szeretne elérni?*
   - c) *Legfeljebb mekkora szórása lehet az élettartamnak, ha a várható érték nem változik (5,8 év), ahhoz, hogy a 2%-os célt elérjék?*

Megoldás:

a) A képcsövek hány százalékát kell kicserélni a garancia időtartama alatt?

$$P(\xi < 2) = F(2) = \Phi\left(\frac{2-5{,}8}{2{,}3}\right) = \Phi(-1{,}65) = 1 - \Phi(1{,}65) = 1 - 0{,}950529 = 0{,}049 \approx 5\%$$

b) Mekkorára kell növelni a képcsövek élettartamát (a szórás nem változik), ha a cég legfeljebb 2%-os garanciális cserét szeretne elérni?

$$P(\xi < 2) = 0{,}02 \to \Phi\left(\frac{2-\mu}{2{,}3}\right) = 0{,}02 \to \Phi(u) = 0{,}98 \to u = -2{,}06$$

$$\frac{2-\mu}{2{,}3} = -2{,}06 \to \mu = 6{,}74 év$$

5,8-ról 6,74 évre kell növelni a képcsövek várható élettartamát.

c) Legfeljebb mekkora szórása lehet az élettartamnak, ha a várható érték nem változik (5,8 év), ahhoz, hogy a 2%-os célt elérjék?

$$P(\xi < 2) = 0{,}02 \to \Phi\left(\frac{2-5{,}8}{\sigma}\right) = 0{,}02 \to u = -2{,}06$$

$$\frac{2-5{,}8}{\sigma} = -2{,}06 \to \sigma = 1{,}85 év$$

Ebben az esetben pedig 2,3 évről 1,85 évre kell csökkenteni a szórást.

4. Döntéselmélet

1. *Adott az alábbi nyereség típusú döntési mátrix:*

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	100	60	-40	-20
s_2	20	70	80	60
s_3	40	60	200	60
s_4	-10	20	20	70

Hogyan döntene bizonytalan körülmények között?

Megoldás:

1. Wald-kritérium

Minden egyes stratégiánál megkeressük a legrosszabb következményt.

$S_1 \rightarrow -40$
$S_2 \rightarrow 20$
$S_3 \rightarrow 40$
$S_4 \rightarrow -10$

E legrosszabb következmények közül a legkevésbé rosszat választjuk, vagyis s_3-at.

2. Laplace-kritérium

Minden egyes tényállapot bekövetkezéséhez ugyanakkora valószínűséget kapcsolunk.

$P(t_1)= P(t_2)= P(t_3)= P(t_4)= ¼=0,25$

Kiszámítjuk minden egyes stratégiához kapcsolódóan a következmények várható értékét.

$$M(s_1) = \frac{1}{4}\cdot 100 + \frac{1}{4}\cdot 60 - \frac{1}{4}\cdot 40 - \frac{1}{4}\cdot 20 = 25{,}0$$

$$M(s_2) = \frac{1}{4}\cdot 20 + \frac{1}{4}\cdot 70 + \frac{1}{4}\cdot 80 + \frac{1}{4}\cdot 60 = 57{,}5$$

$$M(s_3) = \frac{1}{4}\cdot 40 + \frac{1}{4}\cdot 60 + \frac{1}{4}\cdot 200 + \frac{1}{4}\cdot 60 = 90{,}0$$

$$M(s_4) = -\frac{1}{4}\cdot 10 + \frac{1}{4}\cdot 20 + \frac{1}{4}\cdot 20 + \frac{1}{4}\cdot 70 = 25{,}0$$

Ezek közül a legnagyobb várható értékűt választjuk, azaz s_3-at.

3. Savage-kritérium
Elmaradó haszon mátrixot készítünk, majd a Wald-kritériumot alkalmazzuk.

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	*0*	*10*	*240*	*90*
s_2	*80*	*0*	*120*	*10*
s_3	*60*	*10*	*0*	*10*
s_4	*110*	*50*	*180*	*0*

Kiválasztjuk minden egyes stratégiánál a legrosszabb következményeket:

$S_1 \rightarrow 240$
$S_2 \rightarrow 120$
$S_3 \rightarrow 60$
$S_4 \rightarrow 180$

Majd ezek közül a legkevésbé rosszat választjuk, vagyis s_3-at.

2. *Egy vállalkozó automatizált gyártóberendezést kíván importálni. A gép megbízható működéséhez – többek között – egy kritikus alkatrész hibátlan működése szükséges.*
A szállító ajánlata szerint a berendezéssel együtt vásárolt tartalék alkatrészek ára: 10.000 €/db. Egy-egy alkatrész utólagos beszerzésének a költsége viszont: 35.000 €/db.
A szállító adatai szerint az eddig eladott berendezések üzemeltetése során egy adott berendezés esetén legfeljebb 3 meghibásodás fordult elő.

a) *Hány tartalék alkatrészt vásároljon a vásárló, ha nincs információja a berendezés megbízhatóságáról?*
b) *Hogyan alakul a vállalkozó döntése, ha megkapja az eddig eladott 231 db. berendezésről készült alábbi meghibásodási statisztikát.*

Meghibásodott alkatrészek száma	**0**	**1**	**2**	**3**
Berendezések száma	**135**	**56**	**27**	**13**

Megoldás:
Döntési mátrix készítése. 4 tényállapotunk van: 0, 1, 2, vagy 3 meghibásodás fordul elő.
A stratégiák: 0, 1, 2, vagy 3 tartalék alkatrészt vásárolunk.
A következmények pedig az ezzel kapcsolatos költségek.

	t_0	t_1	t_2	t_3
s_0	*0*	*35000*	*70000*	*105000*
s_1	*10000*	*10000*	*45000*	*80000*
s_2	*20000*	*20000*	*20000*	*55000*
s_3	*30000*	*30000*	*30000*	*30000*

1. Wald-kritérium

Minden egyes stratégiánál megkeressük a legrosszabb következményt.

$S_0 \rightarrow$ 105000
$S_1 \rightarrow$ 80000
$S_2 \rightarrow$ 55000
$S_3 \rightarrow$ 30000

E legrosszabb következmények közül a legkevésbé rosszat választjuk, vagyis s_3-at.

2. Laplace-kritérium

Minden egyes tényállapot bekövetkezéséhez ugyanakkora valószínűséget kapcsolunk.
$P(t_0)= P(t_1)= P(t_2)= P(t_3)= ¼=0,25$

Kiszámítjuk minden egyes stratégiához kapcsolódóan a következmények várható értékét.

$$M(s_0)=\frac{1}{4}\cdot 10000+\frac{1}{4}\cdot 35000+\frac{1}{4}\cdot 70000+\frac{1}{4}\cdot 105000=55000$$

$$M(s_1)=\frac{1}{4}\cdot 10000+\frac{1}{4}\cdot 10000+\frac{1}{4}\cdot 45000+\frac{1}{4}\cdot 80000=36250$$

$$M(s_2)=\frac{1}{4}\cdot 20000+\frac{1}{4}\cdot 20000+\frac{1}{4}\cdot 20000+\frac{1}{4}\cdot 55000=115000$$

$$M(s_3)=\frac{1}{4}\cdot 30000+\frac{1}{4}\cdot 30000+\frac{1}{4}\cdot 30000+\frac{1}{4}\cdot 30000=30000$$

Ezek közül a legnagyobb várható értékűt választjuk, azaz s_2-őt.

3. Savage-kritérium

Elmaradó haszon mátrixot készítünk, majd a Wald-kritériumot alkalmazzuk.

	t_0	t_1	t_2	t_3
s_0	*0*	*25000*	*50000*	*75000*
s_1	*10000*	*0*	*25000*	*50000*
s_2	*20000*	*10000*	*0*	*25000*
s_3	*30000*	*20000*	*10000*	*0*

Kiválasztjuk minden egyes stratégiánál a legrosszabb következményeket:
$S_0 \rightarrow$ 75000
$S_1 \rightarrow$ 50000
$S_2 \rightarrow$ 25000
$S_3 \rightarrow$ 30000

Majd ezek közül a legkevésbé rosszat választjuk, vagyis s_2-őt.

5. Első- és másodfajú hiba

1. *Egy tömeggyártásban előállított termék szélességi mérete szabályozott folyamatban* $\mu^0 = 920\,mm$ *és* $\sigma^0 = 1\,mm$. *Legyen a névleges érték körül szimmetrikusan elhelyezkedő beavatkozási határ:* $BH = \mu^0 \pm 2\sigma^0$.

   a) *Számítsa ki az elsőfajú hibát!*
   b) *Tételezzük fel, hogy egy veszélyes zavarhatás a beállítási szintet* $\mu^1 = 922\,mm$*-re változtatja (a szórást nem befolyásolja). Mekkora lesz a szabályozás másodfajú hibája?*
   c) *A számításokat végezze el* $n = 1$ *és* $n = 4$ *elemű minták átlagára is!*

Megoldás:

a) *elsőfajú hiba*

$$\frac{\alpha}{2} = P(\xi < ABH) = F(ABH) = F(920 - 2\cdot 1) = F(918) = \Phi\left(\frac{918-920}{1}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) =$$
$$= 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275 = 2{,}28\% \to \alpha = 4{,}56\%$$

b) *másodfajú hiba*

$$\beta = P(918 \le \xi < 922) = F(922) - F(918) = \Phi\left(\frac{922-922}{1}\right) - \Phi\left(\frac{918-922}{1}\right) = \Phi(0) - \Phi(-4) =$$
$$= 0{,}5 - 1 + 1 = 0{,}5 = 50\%$$

c) *n=4-re*

Változnak a beavatkozási határok!

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = 0{,}5 \to ABH = 920 - 2\cdot 0{,}5 = 919 \to FBH = 921$$

$$\frac{\alpha}{2} = P(\xi < 919) = F(919) = \Phi\left(\frac{919-920}{0{,}5}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}97725 \approx 0{,}02275 \to \alpha = 4{,}56\%$$

$$\beta = P(919 \le \xi < 921) = F(921) - F(919) = \Phi\left(\frac{921-922}{0{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{919-922}{0{,}5}\right) = \Phi(-2) - \Phi(-6) =$$
$$= 1 - \Phi(2) - 1 + \Phi(6) = -0{,}97725 + 1 = 0{,}02275 \approx 2{,}28\%$$

2. *Egy termék tömegének eloszlása N(100 g; 1 g). Mekkora szimmetrikus beavatkozási határokat használnak 15%-os kockázati szint mellett n=4 elemű minták számtani átlagára?*

   Mekkora a másodfajú hiba, ha a folyamat N(100,5 g; 1,2 g)-ra állítódik el?

   Megoldás:

$$P(\xi < ABH) = \Phi(\frac{ABH - 100}{1/\sqrt{4}}) = 0{,}075 \rightarrow u = -1{,}44 \rightarrow \frac{ABH - 100}{1/\sqrt{4}} = -1{,}44 \rightarrow ABH = 99{,}28$$

$$FBH = 100{,}72$$

$$\beta = P(99{,}28 \le \xi < 100{,}72) = F(100{,}72) - F(99{,}28) = \Phi(\frac{100{,}72 - 100{,}5}{1{,}2/\sqrt{4}}) - \Phi(\frac{99{,}28 - 100{,}5}{1{,}2/\sqrt{4}}) =$$

$$= \Phi(0{,}37) - \Phi(-2{,}03) = \Phi(0{,}37) - 1 + \Phi(2{,}03) = 0{,}644309 - 1 + 0{,}9786 = 0{,}623 = 62{,}3\%$$

6. Becslés

1. *Egy mosóporgyárban az egyik adagolóautomata 500g tömegű mosóport tölt papírdobozokba. A gép által töltött dobozokból vett minta adatai:*
   483g; 502g; 498g; 496g; 502g; 494g; 491g; 505g; 486g.
   A gép által töltött tömeg normális eloszlású, 8 g szórással.
   Határozza meg a gép által töltött dobozok tömegének konfidencia intervallumát 98%-os megbízhatósági szint mellett!

   Megoldás:
   Várható érték becslése intervallummal ismert elméleti szórás esetén

$$\alpha = 2\%$$

$$\sigma = 8g$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{483+502+498+496+502+494+491+505+486}{9} = 495{,}22g$$

$$P(\bar{x} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$

$$u_{\alpha/2} = u_{0{,}01} = 2{,}34$$

$$495{,}22 - 2{,}34 \cdot \frac{8}{3} < \mu < 495{,}22 + 2{,}34 \cdot \frac{8}{3}$$

$$488{,}98 < \mu < 501{,}46$$

2. *Hosszú évek tapasztalata alapján Magyarországon a lánycsecsemők születéskori súlya normális eloszlást követ 3,2 kg átlaggal és 0,6 kg szórással. Kérdések:*
   a) *Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott lánycsecsemő súlya 3,0 és 3,4 kg között van?*
   b) *Mi a valószínűsége annak, hogy egy 10 elemű véletlen minta átlaga 3,0 és 3,4 kg között van?*
   c) *Mi ugyanennek a valószínűsége 100 elemű minta esetén?*
   d) *Milyen intervallumba várhatók a 100 elemű minták átlagai 95%-os valószínűséggel?*
   e) *Szerkesszünk konfidencia intervallumot a sokasági átlagra, ha egy 100 elemű minta átlaga 3,1 kg és a szórás továbbra is 0,6 kg!*

Megoldás:

$$a) P(3 < \xi < 3{,}4) = \Phi(\frac{3{,}4-3{,}2}{0{,}6}) - \Phi(\frac{3-3{,}2}{0{,}6}) = \Phi(0{,}33) - \Phi(-0{,}33) = 2\Phi(0{,}33) - 1 = 2 \cdot 0{,}63 - 1 = 0{,}26$$

Tehát 26% annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott lánycsecsemő súlya 3,0 és 3,4 kg között van.

$$b) P(3 < \xi < 3{,}4) = \Phi(\frac{3{,}4-3{,}2}{\frac{0{,}6}{\sqrt{10}}}) - \Phi(\frac{3-3{,}2}{\frac{0{,}6}{\sqrt{10}}}) = \Phi(1{,}054) - \Phi(-1{,}054) = 2\Phi(1{,}05) - 1 = 2 \cdot 0{,}8531 - 1 = 0{,}7062$$

Azaz az ekkora elemszámú mintaátlagok 71%-a ebben az intervallumban lesz.

$$c) P(3 < \xi < 3{,}4) = \Phi(\frac{3{,}4-3{,}2}{\frac{0{,}6}{\sqrt{100}}}) - \Phi(\frac{3-3{,}2}{\frac{0{,}6}{\sqrt{100}}}) = \Phi(3{,}33) - \Phi(-3{,}33) = 2\Phi(3{,}33) - 1 = 2 \cdot 0{,}9996 - 1 = 0{,}9992$$

Azaz 100 elemű minták esetén már csak az átlagok 0,08%-a nem fér bele ebbe az intervallumba.

$$d) P(\bar{x} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$\alpha = 5\% \to \Phi(u) = 0{,}975 \to u = 1{,}96$$

$$3{,}2 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{100}} < \mu < 3{,}2 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{100}}$$

$$3{,}08 < \mu < 3{,}32$$

Azaz a keresett intervallum: (3,08; 3,32), a mintaátlagok 95%-a ebbe az intervallumba esik.

$$e) P(\bar{x} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$\alpha = 5\% \to \Phi(u) = 0{,}975 \to u = 1{,}96$$

$$3{,}1 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{100}} < \mu < 3{,}1 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{100}}$$

$$2{,}98 < \mu < 3{,}22$$

Azaz a keresett intervallum: (2,98; 3,22). Ez az intervallum tartalmazza a feltételezett 3,2-es sokasági átlagot, azaz ezzel a feltevéssel mintabeli eredményünk összhangban van.

3. *Egy évben a BME gazdálkodási szakának nappali tagozatára jelentkezők közül 17 fős mintát vettek egyszerű véletlen kiválasztással. A mintában szereplő felvételizők pontszáma a következő volt:*
118; 119; 121; 103; 101; 125; 116; 99; 100; 114; 115; 96; 88; 112; 113; 109; 94.

Határozzuk meg a felvételizők átlagos pontszámának és a pontszámok szórásának 95%-os konfidencia intervallumát!

Megoldás:

a) A pontszámok várható értékének intervallumbecslése ismeretlen elméleti szórás esetén

$\alpha = 5\%$

$$\widehat{\sigma} = s^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{17}(x_i - \overline{x})^2}{17-1}} = \sqrt{\frac{(118-108{,}41)^2 + (119-108{,}41)^2 + \ldots + (109-108{,}41)^2 + (94-108{,}41)^2}{16}} =$$

$$= \sqrt{114{,}12} \approx 10{,}68$$

$$\widehat{\mu} = \overline{x} = \frac{118+119+121+\ldots+113+109+94}{17} = \frac{1843}{17} = 108{,}41$$

$$P(\overline{x} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{s*}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$t_{\alpha/2}(DF) = t_{0,975}(16) = 2{,}12$$

$$108{,}41 - 2{,}12 \cdot \frac{10{,}68}{\sqrt{17}} < \mu < 108{,}41 + 2{,}12 \cdot \frac{10{,}68}{\sqrt{17}}$$

$$102{,}92 < \mu < 113{,}9$$

b) A pontszámok szórásának becslése intervallummal

$$P\left(\frac{(n-1)s^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\alpha = 5\%$$

$$\chi^2_{\alpha/2} = 28{,}845$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2} = 6{,}908$$

$$\frac{16 \cdot 10{,}68^2}{28{,}845} < \sigma^2 < \frac{16 \cdot 10{,}68^2}{6{,}908}$$

$$63{,}27 < \sigma^2 < 264{,}18$$

$$7{,}95 < \sigma < 16{,}25$$

4. *Egy vállalat szervezetének átvilágításakor 1500 szervezeti alkalmazott közül 225 munkatársat véletlenszerűen kiválasztottak, és több kérdés mellett megkérdezték tőlük, hogy mekkora fizetést tartanának kielégítőnek. A válaszok átlaga havi bruttó 250 ezer forint, 113 ezer forint szórással*
Becsüljük meg 95 és 99%-os megbízhatósággal, mekkora havi bruttó bérkifizetésre kell a cégnek felkészülnie, ha a kielégítőnek vélt szintet szeretné biztosítani!

Megoldás:

$$\alpha_1 = 5\%$$

$$n = 225$$

$$\hat{\sigma} = s^* = 113000$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 250000$$

$$P(\bar{x} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{s*}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$t_{\alpha/2}(DF) = t_{0,975}(224) = 1{,}96$$

$$250000 - 1{,}96 \cdot \frac{113000}{\sqrt{225}} < \mu < 250000 + 1{,}96 \cdot \frac{113000}{\sqrt{225}}$$

$$235234{,}7 < \mu < 264765{,}3$$

$$\alpha_2 = 1\%$$

$$t_{\alpha/2}(DF) = t_{0,995}(224) = 2{,}576$$

$$250000 - 2{,}576 \cdot \frac{113000}{\sqrt{225}} < \mu < 250000 + 2{,}576 \cdot \frac{113000}{\sqrt{225}}$$

$$230594{,}13 < \mu < 269405{,}87$$

5. *Egy vezeték nélküli, újratölthető csavarhúzókat gyártó vállalatnál felmérve a csavarhúzók működési idejét, azt normális eloszlásúnak találták. 15 csavarhúzó élettartamát megvizsgálva az átlagos működési idő 8900 óra, a szórás 500 óra. Adjuk meg a várható érték 95%-os konfidencia intervallumát. A cég új reklámkampányában ki szeretné emelni, hogy a csavarhúzók 99%-a egy adott élettartamnál tovább működik. Maximum mekkora működési időt mondjon, ha nem akarja becsapni a vásárlókat?*

Megoldás:

a, Várható érték becslése ismeretlen elméleti szórás esetén

$s^* = 500h$

$\overline{x} = 8900h$

$n = 15$

$DF = n - 1 = 15 - 1 = 14$

$s_{\overline{x}} = \frac{s^*}{\sqrt{n}} = \frac{500}{\sqrt{15}} = 129{,}1h$

$\Delta_t = t_{\alpha/2} * s_{\overline{x}} = 2{,}145 * 129{,}1 \approx 277$

$P(\overline{x} - \Delta_t < \mu < \overline{x} + \Delta_t) = 1 - \alpha = 0{,}95$

$\overline{x} - \Delta_t < \mu < \overline{x} + \Delta_t$

$8900 - 277 < \mu < 8900 + 277$

$8623 < \mu < 9177$

Ez a várható érték 95%-os konfidencia intervalluma.

b,

$\Delta_t = t_{\alpha/2} * s_{\overline{x}} = 2{,}977 * 129{,}1 \approx 384{,}3$

$P(\overline{x} - \Delta_t < \mu < \overline{x} + \Delta_t) = 1 - \alpha = 0{,}95$

$\overline{x} - \Delta_t < \mu < \overline{x} + \Delta_t$

$8900 - 384{,}3 < \mu < 8900 + 384{,}3$

$8515{,}7 < \mu < 9284{,}3$

Maximum 9284,3h működési időt mondhat, ha nem akarja becsapni a vásárlókat.

7. Hipotézisvizsgálatok

7.1. Nemparaméteres próbák

1. *Egy sörgyártó vállalatnál a sör névleges térfogata 500ml kell, hogy legyen, és a térfogat szórása legfeljebb 10 ml lehet. Egy 100 elemű véletlen mintából ellenőrzik a szállítmányt. A minta adatai a következők:*

Térfogat, ml	db
-480	5
480-490	20
490-500	30
500-510	24
510-520	16
520-	5
Összesen	100

A mintából számított jellemzők:

$$\bar{x} = 499{,}1ml$$
(ezt most megadtuk, de becsült paraméterek)
$$s^{*} = 12{,}6ml$$

a) *5%-os szignifikancia szinten tesztelje azt a hipotézist, hogy a betöltött sör térfogat szerinti eloszlása normálisnak tekinthető!*
b) *A minta alapján ellenőrizze az átlagos töltősúlyra vonatkozó hipotézis teljesülését!*

Megoldás:
a) Illeszkedésvizsgálat
H_0: a sör névleges térfogata 499,1 ml várható értékű és 12,6 ml szórású normális eloszlást követ
H_1: a sör névleges térfogata nem 499,1 ml várható értékű és 12,6 ml szórású normális eloszlást követ

Térfogat, ml	f_i	p_i	F_i	$\chi^2_{szám}$
-480	5	0,0643	6,43	0,318
480-490	20	0,1715	17,15	0,474
490-500	30	0,29227	29,22	0,021
500-510	24	0,2772	27,72	0,5
510-520	16	0,1464	14,64	0,126
520-	5	0,0485	4,85	0,00464
Összesen	100	1	100	

Ahol f a tapasztalati gyakoriság, F pedig az elméleti gyakoriság ($F_i=p_i*100$).

$P(\xi < 480) = F(480) = \Phi(\frac{480-499{,}1}{12{,}6}) = \Phi(-1{,}52) = 1-\Phi(1{,}52) = 1-0{,}935745 =$
$= 0{,}0643 = 6{,}43\%$

$P(480 < \xi < 490) = F(490) - F(480) = F(490) - 0{,}0643 = \Phi(\frac{490-499{,}1}{12{,}6}) - 0{,}0643 =$
$= \Phi(-0{,}72) - 0{,}0643 = 1-\Phi(0{,}72) - 0{,}0643 = (1-0{,}764237) - 0{,}0643 = 0{,}235763 - 0{,}0643 = 0{,}1715 = 17{,}15\%$

$P(490 < \xi < 500) = F(500) - F(490) = \Phi(\frac{500-499{,}1}{12{,}6}) - 0{,}235763 = \Phi(0{,}07) - 0{,}235763 =$
$= 0{,}5279 - 0{,}235763 = 0{,}2922 = 29{,}22\%$

$P(500 < \xi < 510) = F(510) - F(500) = \Phi(\frac{510-499{,}1}{12{,}6}) - 0{,}5279 = \Phi(0{,}86) - 0{,}5279 =$
$= 0{,}805105 - 0{,}5279 = 0{,}277205 = 27{,}72\%$

$P(510 < \xi < 520) = F(520) - F(510) = \Phi(\frac{520-499{,}1}{12{,}6}) - 0{,}805105 = \Phi(1{,}66) - 0{,}805105 =$
$= 0{,}951543 - 0{,}805105 = 0{,}14644 = 14{,}64\%$

$P(\xi > 520) = 1 - P(\xi < 520) = 1 - F(520) = 1 - 0{,}951543 = 0{,}048457 = 4{,}85\%$

$$\chi^2_{szám} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i} = \frac{(5-6{,}43)^2}{6{,}43} + \frac{(20-17{,}15)^2}{17{,}15} + 0{,}021 + 0{,}5 + 0{,}126 + 0{,}00464 = 1{,}444$$

$\chi^2_{kr} = 7{,}815$

$DF = r - l - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$

$\chi^2_{szám} < \chi^2_{kr} \rightarrow H_0$

b) PARAMÉTERES! egymintás u-próba, mert n>30

$H_0 : \mu = 500$
$H_1 : \mu \neq 500$

$$u_{sz} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}} = \frac{499{,}1 - 500}{\frac{12{,}6}{\sqrt{100}}} = -0{,}714$$

$\alpha = 5\%$

$u_{kr} = u_{\alpha/2} = \Phi(0{,}975) \rightarrow u_{kr} = \pm 1{,}96$

$-u_{kr} < u_{sz} < u_{kr} \rightarrow -1{,}96 < -0{,}714 < 1{,}96 \rightarrow H_0$

2. *Véletlenszerűen kiválasztott 120 db mikrohullámú sütő élettartam szerinti megoszlását mutatja a következő táblázat:*

Élettartam, év	db
-5	8
5-6	28
6-7	44
7-8	25
8-	15
Összesen	120

Ismeretes, hogy

$\bar{x} = 6{,}36 év$
(becsültük az osztályközös gyakorisági sorból)
$s^* = 0{,}67 év$

a) *5%-os szignifikancia szinten ellenőrizze azt az állítást, hogy mikrohullámú sütők élettartama normális eloszlást követ!*
b) *Teljesül-e 5%-os szignifikancia szinten az a minőségi előírás, hogy az élettartam átlaga meg kell, hogy haladja a 6 évet!*

Megoldás:

a) Illeszkedésvizsgálat
H_0: a mikrohullámú sütők élettartama 6,36 év várható értékű és 0,67 év szórású normális eloszlást követ
H_1: a mikrohullámú sütők élettartama nem 6,36 év várható értékű és 0,67 év szórású normális eloszlást követ

Élettartam, év	f_i	p_i	F_i	$\chi^2_{szám}$
-5	8	0,022	2,64	10,88
5-6	28	0,2725	32,7	0,67
6-7	44	0,5344	64,13	6,31
7-8	25	0,1637	19,64	1,45
8-	15	0,0073	0,876	227,7
Összesen	120	1	120	247,1

$$P(\xi < 5) = F(5) = \Phi(\frac{5-6{,}36}{0{,}67}) = \Phi(-2{,}03) = 1 - \Phi(2{,}03) = 1 - 0{,}978 =$$
$$= 0{,}022 = 2{,}2\%$$
$$P(5 < \xi < 6) = F(6) - F(5) = F(6) - 0{,}022 = \Phi(\frac{6-6{,}36}{0{,}67}) - 0{,}022 =$$
$$= \Phi(-0{,}54) - 0{,}022 = 1 - \Phi(0{,}54) - 0{,}022 = 1 - 0{,}705401 - 0{,}022 = 0{,}2725 = 27{,}25\%$$
$$P(6 < \xi < 7) = F(7) - F(6) = \Phi(\frac{7-6{,}36}{0{,}67}) - 0{,}2945 = \Phi(0{,}95) - 0{,}2945 =$$
$$= 0{,}828944 - 0{,}2945 = 0{,}5344 = 53{,}44\%$$
$$P(7 < \xi < 8) = F(8) - F(7) = \Phi(\frac{8-6{,}36}{0{,}67}) - 0{,}828944 = \Phi(2{,}44) - 0{,}828944 =$$
$$= 0{,}992656 - 0{,}828944 = 0{,}1637 = 16{,}37\%$$
$$P(\xi > 8) = 1 - P(\xi < 8) = 1 - F(8) = 1 - 0{,}992656 = 0{,}0073 = 0{,}73\%$$

$$\chi^2_{szám} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i} = \frac{(8-2{,}64)^2}{2{,}64} + \frac{(28-32{,}7)^2}{32{,}7} + 6{,}31 + 1{,}45 + 227{,}7 = 247{,}01$$
$$\chi^2_{kr} = 5{,}991$$
$$DF = r - l - 1 = 5 - 2 - 1 = 2$$
$$\chi^2_{szám} > \chi^2_{kr} \rightarrow H_1$$

b) PARAMÉTERES! egymintás u-próba, mert n>30

$$H_0 : \mu = 6$$
$$H_1 : \mu > 6$$
$$u_{sz} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}} = \frac{6{,}36 - 6}{\frac{0{,}67}{\sqrt{120}}} = 5{,}9$$
$$\alpha = 5\%$$
$$u_{kr} = u_{\alpha/2} = \Phi(0{,}975) \rightarrow u_{kr} = \pm 1{,}96$$
$$u_{sz} > +1{,}96 \rightarrow H_1$$

3. *Egy adott évben 98 vegyipari vállalatot megvizsgálva a 8 napon túl gyógyuló sérülteket eredményező balesetek száma az alábbi táblázatban foglaltaknak megfelelően alakult.*

Balesetek száma	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Vállalatok száma	*4*	*18*	*22*	*17*	*15*	*10*	*4*	*6*

a) *Leírható-e a balesetek száma Poisson-eloszlással (α=1%)?*
b) *Mennyi a számtani átlag, a módusz és a medián értéke?*

Megoldás:

a) *Illeszkedésvizsgálat*

λ becslése (a számtani átlag segítségével) a H_0 hipotézis megfogalmazásához:

$$\hat{\lambda}=\frac{0\cdot4+1\cdot18+2\cdot22+3\cdot17+4\cdot15+5\cdot10+6\cdot4+7\cdot6}{96}=\frac{289}{96}\approx3{,}0$$

H_0: a balesetek száma leírható λ=3,0 paraméterű Poisson-eloszlással
H_1: a balesetek száma nem λ=3,0 paraméterű Poisson-eloszlású

Osztályok	f_k	p_k	F_k	χ^2_i
0	4	0,049	4,704	0,105
1	18	0,149	14,304	0,955
2	22	0,224	21,504	0,0114
3	15	0,224	21,504	1,967
4	15	0,168	16,128	0,0789
5	10	0,1	9,6	0,0167
6	4	0,05	4,8	0,133
7	6	0,021	2,016	7,87
Σ	**96**	**1,0**	**96**	**11,137**

(Megjegyzés. A p_k értékeket a Poisson-eloszlás táblázatából keressük ki, az F_k elméleti gyakorisági értékeket pedig a következőképpen kapjuk: $F_k = p_k*96$)

$$\chi^2_{szám}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(f_i-F_i)^2}{F_i}=\frac{(4-4{,}704)^2}{4{,}704}+\frac{(18-14{,}304)^2}{14{,}304}+0{,}0114+1{,}967+0{,}0789+$$
$$+0{,}0167+0{,}133+7{,}87=11{,}137$$

$$\chi^2_{kr}=16{,}812$$

$$DF=r-l-1=8-1-1=6$$

$$\chi^2_{szám}<\chi^2_{kr}\rightarrow H_0$$

b) számtani átlag, módusz, medián értéke

Számtani átlag értékét már az a) pontban kiszámoltuk a paraméter becsléséhez, értéke 3,0.
A módusz a legnagyobb gyakoriságú érték: vagyis a vállalatok legnagyobb részénél az adott évben 2 olyan baleset volt, amelynél a balesetet szenvedők 8 napon túl gyógyuló sérülést szereztek, így a módusz értéke: 2
A medián helyzeti középérték: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 → így a medián: 3,5.

7.2. Hipotézisvizsgálatok, paraméteres és nemparaméteres próbák

1. *Egy halogénizzókat gyártó vállalatnál megvizsgálták egy új típusú izzó élettartamát. A korábbi típusú izzók élettartama 5132 óra volt. Véletlen mintavétellel kiválasztva 325 új típusú izzót, az átlagos élettartamuk 5213 óra volt, 216 óra szórással. Vizsgáljuk meg 10%-os szignifikancia szinten, hogy valóban megnőtt-e az izzók élettartama?*

   Megoldás:
   Egymintás u-próba, mivel n>30

   H_0: az átlagos élettartam 5132 óra (μ=5132h)
   H_1: az átlagos élettartam nagyobb, mint 5132 óra (μ>5132h)

$$u_{sz} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx \frac{\bar{x}-\mu}{s^*/\sqrt{n}} = \frac{5213-5132}{216/\sqrt{325}} = \frac{81}{11{,}98} = 6{,}76$$

$$u_{kr} : \alpha = 10\% \rightarrow \Phi(u) = 0{,}9 \rightarrow u_{kr} = 1{,}285$$

$$u_{sz} > u_{kr} \rightarrow H_1$$

   A nullhipotézist elutasítjuk, az új típusú izzók élettartama valóban nagyobb.

2. *Egy automata gépsor által töltött dobozokból 10 elemű mintát veszünk. A mintába került 10 doboz grammban kifejezett töltősúlya a következő:*
   255g, 242g, 245g, 253g, 249g, 251g, 250g, 255g, 245g, 246g.
   Ellenőrizzük, hogy a gépsor teljesíti-e a 250g várható értékű specifikációt 1%-os szignifikancia szinten!

   Megoldás: egymintás t-próba, n<30
   H_0: μ=250
   H_1: μ≠250

$$\bar{x} = \frac{255+242+...+245+246}{10} = \frac{2491}{10} = 249{,}1$$

$$s^* = \sqrt{\frac{(255-249{,}1)^2+(242-249{,}1)^2+...+(246-249{,}1)^2}{10-1}} = \sqrt{\frac{182{,}9}{9}} = 4{,}51$$

$$t_{sz} = \frac{\bar{x}-\mu}{s^*/\sqrt{n}} = \frac{249{,}1-250}{4{,}51/\sqrt{10}} = 1{,}43$$

$$t_{kr} = t_{\alpha/2} = t_{0{,}995} = \pm 3{,}25$$

$$mivel -3{,}25 < 1{,}43 < 3{,}25 \rightarrow H_0$$

3. *Két iskolában (A és B) a tanulók intelligencia szintjét hasonlítják össze. Mindkét iskolából 25-25 fős véletlen mintát vettek. A két minta adataiból a számítások eredményei:*

$$\bar{x}_A = 117$$
$$s_A^* = 18$$
$$\bar{x}_B = 112$$
$$s_B^* = 13{,}4$$

Vizsgáljuk meg 1%-os szignifikancia szinten, hogy van-e eltérés a két iskola tanulóinak intelligencia szintje között!

Megoldás:

1. *F-próba*

$$H_0 : \sigma_A = \sigma_B$$
$$H_1 : \sigma_A > \sigma_B$$
$$F_{sz} = \frac{s_A^{*2}}{s_B^{*2}} = \frac{18^2}{13{,}4^2} = 1{,}804$$
$$F_{kr} = 2{,}66$$
$$F_{sz} < F_{kr} \rightarrow H_0$$

2. *kétmintás t-próba*

$$H_0 : \mu_A = \mu_B$$
$$H_1 : \mu_A > \mu_B$$
$$t_{sz} = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{s_A^{*2}}{n_A} + \frac{s_B^{*2}}{n_B}}} = \frac{117 - 112}{\sqrt{\frac{18^2}{25} + \frac{13{,}4^2}{25}}} = \frac{5}{\sqrt{12{,}96 + 7{,}18}} = 1{,}116$$
$$t_{kr} = t_\alpha = 2{,}403$$
$$t_{sz} < t_{kr} \rightarrow H_0$$

4. *Egy konzervgyárban két automata tölt lekvárt 0,5 literes üvegekbe. A gyártásközi ellenőrzés során véletlen mintát vettek mindkét gépről. A mintákra vonatkozó eredmények:*

Gép	*Mintaelemszám*	*Átlagos töltési mennyiség, ml*	*Töltési tömeg szórása, ml*
I.	*32*	*503*	*8,2*
II.	*37*	*495*	*7,6*

Döntse el 5%-os szignifikancia szinten, hogy tekinthető-e azonosnak a két gépen a töltési tömeg szórása és átlaga!

Megoldás:

a) szórások egyezőségének vizsgálata: F-próba

$$H_0: \sigma_A = \sigma_B$$
$$H_1: \sigma_A > \sigma_B$$
$$F_{sz} = \frac{s_A^{*\,2}}{s_B^{*\,2}} = \frac{8{,}2^2}{7{,}6^2} = 1{,}164$$
$$F_{kr} = 1{,}74$$
$$F_{sz} < F_{kr} \rightarrow H_0$$

b) átlagok egyezőségének vizsgálata: kétmintás u-próba, mivel n_A, n_B >30

$$H_0: \mu_A = \mu_B$$
$$H_1: \mu_A > \mu_B$$
$$u_{sz} = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} = \frac{503-495}{\sqrt{\frac{8{,}2^2}{32} + \frac{7{,}6^2}{37}}} = \frac{8}{\sqrt{2{,}1+1{,}56}} = 4{,}188$$
$$\alpha = 5\% \rightarrow \Phi(u) = 0{,}95 \rightarrow u_{kr} = 1{,}64$$
$$u_{sz} > u_{kr} \rightarrow H_1$$
$$Másik\_megoldás:$$
$$H_0: \mu_A = \mu_B$$
$$H_1: \mu_A \neq \mu_B$$
$$u_{sz} = 4{,}188$$
$$\alpha = 5\% \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \rightarrow \Phi(u) = 0{,}975 \rightarrow u_{kr} = \pm 1{,}96$$
$$u_{sz} > 1{,}96 \rightarrow H_1$$

Felhasznált irodalmak:

- Denkinger G.: Valószínűségszámítási gyakorlatok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977
- Szabó Gábor Csaba – Szűts I.: Matematikai statisztika példatár I-II., Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
- Solt György: Valószínűségszámítás. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973
- Ay János – Kupcsik József: Általános statisztika példatár. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1961
- Juhász Györgyné – Sándorné Kriszt Éva: Statisztika II. távoktatással (főiskolai jegyzet). Távoktatási Universitas Alapítvány, 2002
- Hunyadi László – Vita László: Statisztika közgazdászoknak. Központi Statisztikai Hivatal, Budapest, 2002
- Kerékgyártó Györgyné – Mundruczó György – Sugár András: Statisztikai módszerek és alkalmazásuk a gazdasági, üzleti elemzésekben. Aula kiadó, Budapest, 2001